ΕΛΑΧΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Ορισμός: Μια κανονική επιφάνεια καλείται ελαχιστική αν.ν η μέση καμπυλότητα $K=0$ ($\Leftrightarrow k_1+k_2=0$)

$H^2 \geq K \rightsquigarrow H^2(p) = K(p) \Leftrightarrow k_1(p) = k_2(p)$

Παρατηρήσεις:

① Οι ελαχιστικές επιφάνειες έχουν $K \leq 0$

② όλα τα σημεία ελαχιστικής επιφάνειας είναι υπερβολικά ~~ε~~ ή επίπεδα

③ Οι ελαχιστικές επιφάνειες είναι "λύσεις" του προβλήματος ελαχιστοποίησης του εμβαδού

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η S είναι λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του εμβαδού, τότε $H=0$

Παραδείγματα

Επίπεδο, αλυσοειδής, ελικοειδής επιφάνεια

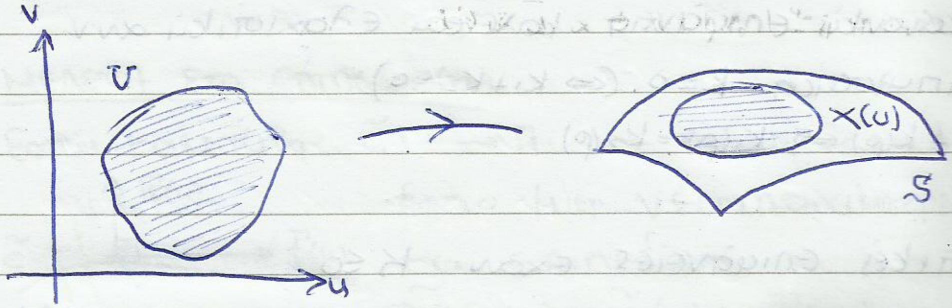
Η αλυσοειδής είναι η μόνη ελαχιστική που είναι και ταυτόχρονα εκ περιστροφής

Η ελικοειδής είναι η μόνη ελαχιστική που είναι και ταυτόχρονα ευθογενής

Ορισμός: Ένα σύστημα συντ/νων $x: U \to S$ με παραμέτρηση (u,v) καλείται ισόθερμο αν.ν $F=0$ και $E=G$.

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ πολ/σιο του ~~πρώτης~~ πίνακα της θεμελιώδους μορφής του επιπέδου

ΘΕΩΡΗΜΑ: Για κάθε $p\in S$, $\exists$ ισοθερμο σύστ. συντ/νων $x: U\to S$ με $p\in X(U)$



Λαπλασιανός Τελεστής $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$

$h: U\to R$: $\Delta h = h_{uu} + h_{vv}$

$\varphi: U\to R^3$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$:

$\Delta\varphi = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3) = \varphi_{uu} + \varphi_{vv}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Εστω $X: U\to S$ ισοθερμο σύστ. συντ/νων με παραμέτρους (u,v). Τότε, ισχύει:

$\Delta X = 2E\cdot HN$

οπου N, η απεικόνιση Gauss

Απόδειξη

ΘΔΟ $\langle \Delta X, X_u\rangle = \langle \Delta X, X_v\rangle = 0$

$\langle \Delta X, X_u\rangle = \langle X_{uu} + X_{vv}, X_u\rangle = \langle X_{uu}, X_u\rangle + \langle X_{vv}, X_u\rangle =$

$= \frac{1}{2}\langle X_u, X_u\rangle_u + \langle X_v, X_u\rangle_v - \langle X_v, X_{uv}\rangle =$

$= \frac{1}{2} E_u + \cancel{F_v}^{0} - \frac{1}{2}\langle X_v, X_v\rangle_u = \frac{1}{2}\cancel{E_u} - \frac{1}{2}\cancel{E_u} = 0$

ομοια αποδεικνύεται $\langle \Delta X, X_v\rangle = 0$

άρα $\Delta X /\!/ N \Rightarrow \Delta X = \lambda N \Rightarrow \boxed{\langle \Delta X, N\rangle = \lambda}$

$\lambda = \langle \Delta X, N\rangle = \langle X_{uu} + X_{vv}, N\rangle = \langle X_{uu}, N\rangle + \langle X_{vv}, N\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = e + g$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{eE + gE}{2E^2} = \frac{e+g}{2E}$$

$$\Delta x = \lambda N \Rightarrow \Delta x = (e+g)N = 2E\,H\,N$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $x : U \to S$ ισόθερμο σύστ. συντ/νων. Η S ελαχιστική αν.ν $\Delta x = 0$ ($\Leftrightarrow$ οι συναρτήσεις συντ/νων $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ του συστ. συντ/νων είναι αρμονικές)

Άσκηση 1

Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^2 - 2y^2$.

i) Νδο είναι κανονική επιφάνεια

ii) Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές διευθύνσεις στο σημείο $(0,0,0)$

iii) Να βρεθούν οι ασυμπτωτικές καμπύλες

iv) Υπάρχει σύστημα συντ/νων της S με $e = g = 0$;

ΛΥΣΗ

i) $S = \Gamma_h$ με $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - 2y^2$ γράφημα και άρα είναι κανονική επιφάνεια

β' τρόπος: με το θεώρημα κρισίμων.

ii) $e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$, $f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{\;}}$, $g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{\;}}$

όπου $h_x = 2x$, $h_y = -4y$, $h_{xx} = 2$, $h_{yy} = -4$, $h_{xy} = 0 = h_{yx}$

άρα

$$e = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 16y^2 + 1}}, \quad f = 0, \quad g = -\frac{4}{\sqrt{4x^2 + 16y^2 + 1}}$$

$e(0,0) = 2$	Το $w = a X_x(0,0) + b X_y(0,0)$ είναι
$g(0,0) = -4$	ασυμπτωτική διεύθυνση $\Leftrightarrow$
$f(0,0) = 0$	$e(0,0)a^2 + 2f(0,0)ab + g(0,0)b^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2-4b^2=0 \Leftrightarrow (a-\sqrt{2}b)(a+\sqrt{2}b)=0 \Rightarrow \alpha=\sqrt{2}b$ ή $\alpha=-\sqrt{2}b$

όπου $(\alpha,b)\neq(0,0)$ και όπως γραμμική σχέση των α και b τότε $\alpha\neq0$ και $b\neq0$

Ασυμπτ. διευθ. στο $(0,0)$ είναι

$w_1=\sqrt{2}b\,X_x(0,0)+bX_y(0,0)=b(\sqrt{2}X_x(0,0)+X_y(0,0))$

$w_2=-\sqrt{2}b\,X_x(0,0)+bX_y(0,0)=b(-\sqrt{2}X_x(0,0)+X_y(0,0))$

επαληθεύουν το ότι έχουμε 2 ασυμπτ. διευθύνσεις

$$K=\frac{h_{xx}h_{yy}-h^2_{xy}}{(h_x^2+h_y^2+1)^2}=\frac{-4}{(\ \ )^2}<0$$ όλα τα σημεία

της επιφάνειας είναι υπερβολικά.

iii) $X:\mathbb{R}^2\to S$, $X(u,v)=(x,y,h(x,y))$

Η κανονική καμπύλη $c(t)=(x(t),y(t))$ ασυμπτωτική αν

$e(x'(t))^2+2f\,x'(t)y'(t)+g(y'(t))^2=0 \Leftrightarrow$

(όπου $e=e(x(t),y(t))$, $f=\dots$ $g=\dots$)

$\Leftrightarrow 2(x'(t))^2-4(y'(t))^2=0 \Leftrightarrow (x'(t))^2-2(y'(t))^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'(t)-\sqrt{2}y'(t)=0$ ή $x'(t)+\sqrt{2}y'(t)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(t)-\sqrt{2}y(t)=c_1$ ή $x(t)+\sqrt{2}y(t)=c_2$

2 οικογένειες ασυμπτ. καμπυλών

1) $c_1(t)=X(c_1+\sqrt{2}t,t)$ $\left(\begin{matrix}y(t)=t\\x(t)=c_1+\sqrt{2}t\end{matrix}\right)$

2) $c_2(t)=X(c_2-\sqrt{2}t,t)$ $\left(\begin{matrix}y(t)=t\\x(t)=c_2-\sqrt{2}t\end{matrix}\right)$

Για την 1η κατηγορία

$c_1(t)=(c_1+\sqrt{2}t,\ t,\ (c_1-\sqrt{2}t)^2-2t^2)$ γραμμική σχέση

άρα ευθεία (ή $c_1(t)=(c_1,0,c_1^2)+t(\sqrt{2},1,2c_1\sqrt{2})$)

όμοια και για τη 2η κατηγορία

οι οικογένεια θα είναι ευθείες

Επομένως η επιφάνεια μας είναι ευθειογενής

iv) Εφόσον όλα τα σημεία είναι υπερβολικά τότε $e=g=0$ και έτσι $\exists$ τέτοιο σύστ. συντεταγμένων

Εύρεση τέτοιου συστημ. συντεταγμένων

Θα πρέπει οι ασυμπτωτικές καμπύλες να είναι οι ασυμπτωτικές καμπύλες

Εφαρμόζω έτσι παραμέτρηση (u,v) με

$$\left.\begin{aligned} u &= x-\sqrt{2}y \\ v &= x+\sqrt{2}y \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u+v) \\ y &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(v-u) \end{aligned}\right|$$

ορίζω έτσι συνάρτηση $Y(u,v) = X\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2\sqrt{2}}(v-u)\right)$

Θα πρέπει να εξασφαλίσουμε αν η απεικόνιση Y είναι διαφορομορφισμός, όπου όπως γραμμικές άρα πράγματι 1-1 (και διαφορίσιμη)

Επιπλέον Ερώτημα

Ποιες οι κύριες διευθύνσεις στο $(0,0,0)$;

Εκ της θεωρίας

$w = aX_x + bX_y$ είναι κύρια διευθ. αν.ν

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

$E = 1+4x^2$, $F = 8xy$, $G = 1+16y^2$

$E(0,0) = 1$, $F(0,0) = 0$, $G(0,0) = 1$

$e(0,0) = 2$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = -4$

Άρα, $(*)$ είναι

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a=0 \text{ ή } b=0$$

Άρα, οι κυρ. διευθ. είναι

$\{X_x(0,0), X_y(0,0)\}$ όπως υπερβολικά τα σημεία τότε $k_1 > k_2$ και έτσι ορίζονται κατά οι κυρ. διευθ.

Άσκηση 2

Να βρεθούν οι γραμμές (ή καμπύλες) καμπυλότητας της επιφάνειας $S = \Gamma_h$ με $h: R^2 \to R$ τύπου $h(x,y) = x^2 + y^2$

ΛΥΣΗ

Επιφάνεια γράφημα

$E = 1 + h_x^2 = 1 + 4x^2$

$F = h_x h_y = 4xy$

$G = 1 + h_y^2 = 1 + 4y^2$

$$e = \frac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$f = \frac{h_{xy}}{\sqrt{}} = 0$$

$$g = \frac{h_{yy}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

κανονική καμπύλη $c(t) = X(x(t), y(t))$ και αναφερόμαστε στο σύνηθες σύστ. συντ/νων $X(x,y) = (x, y, h(x,y))$ είναι γραμμή καμπυλότητας ανν

$$\begin{vmatrix} y'(t)^2 & -x'(t)\cdot y'(t) & x'(t)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff 4x((y')^2 - (x')^2) + x'y'(x^2 - y^2) = 0 \quad (1)$$

$c'(t) = x'(t)\, X_x(\quad) + y'(t)\, X_y(\quad)$

$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$

Έτσι αν $x \neq 0 \Rightarrow x(t) = x$ αντιστρέψ. $\Rightarrow t = t(x)$

και τότε $y(t) = y(t(x)) \rightsquigarrow \frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$

$$\Leftrightarrow 4xy\left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1\right)+\frac{dy}{dx}(x^2-y^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-4xy=0$$

εξ. δευτέρου βαθμού

Διακρίνουσα: $\Delta=(x^2+y^2)>0$

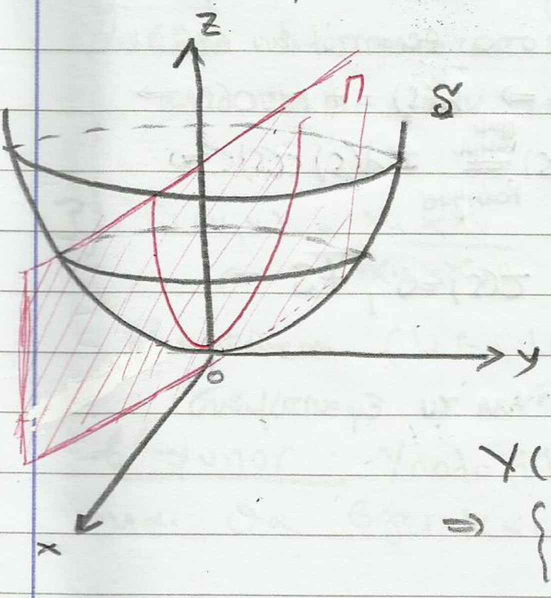
$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ ή $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ δ.ε χωριζόμενων μεταβλ.

$$\Leftrightarrow \frac{d(x^2+y^2)}{dx}=0 \text{ ή } d\left(\frac{y}{x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(t)+y^2(t)=c_1 \text{ ή } y(t)=c_2\cdot x(t)$$

$\Leftrightarrow$ δ: $z=x^2+y^2$; π: $y=c_2x$

παραβολοειδές   επίπεδο



Ερώτημα:

Υπάρχει συστ. συντ/νων ώστε $F=f=0$

Θεωρώ $u=x^2+y^2$

$v=\frac{y}{x}$

με παραμέτρηση

$$Y(u,v)=X(x(u,v),y(u,v)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{cases}$$

στο $(0,0,0)$ η παραμέτρηση δεν δουλεύει το σύστημα συντεταγμένων διότι το σημείο εκεί είναι ομαλό. Άρα, δουλεύει για όλα τα $p\in S\setminus\{(0,0,0)\}$

Άσκηση 3

Έστω C κανονική καμπύλη κανονικής επιφάνειας S. Αν η C έχει παντού θετική καμπυλότητα και ταυτόχρονα είναι ασυμπτωτική καμπύλη και γραμμή καμπυλότητας, τότε είναι επίπεδη.

ΛΥΣΗ

Υποθέτω πως C έχει παράμετρο το μήκος τόξου s

$$k_n(\dot c(s)) = 0 \rightsquigarrow \mathrm{II}_{c(s)}(\dot c(s)) = 0 \iff \langle L_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0$$

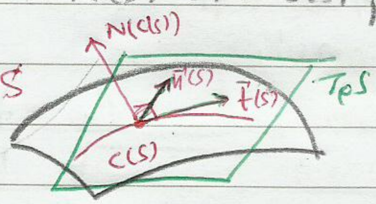
$$\iff -\langle dN_{c(s)}(\dot c(s)), \dot c(s)\rangle = 0 \iff \langle (N\circ c)^\circ(s), \dot c(s)\rangle = 0 \iff$$

$$\iff (\langle N\circ c(s), \dot c(s)\rangle)^\circ - \langle N\circ c(s), \ddot c(s)\rangle = 0 \iff$$

$$\iff \langle N\circ c(s), \dot{\vec t}(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle N\circ c(s), k(s)\vec n(s)\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(s)\langle N\circ c(s), \vec n(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle N(c(s)), \vec n(s)\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec n(s) \in T_{c(s)}S$$



Έτσι, $\vec b(s) = \vec t(s)\times \vec n(s)$ μοναδιαίο και κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο

$$\Rightarrow \vec b(s) = \pm N(c(s)) \Rightarrow \vec b(s) = \pm N\circ c(s) \Rightarrow$$

$$\iff \dot{\vec b}(s) = \pm (N\circ c)^\circ(s) \iff -\tau(s)\vec n(s) \overset{\text{γραμμή καμπυλ.}}{\underset{\text{Rodrigues}}{=}} \pm\lambda(s)\dot c(s) \iff$$

$$\iff -\tau(s)\vec n(s) = \pm\lambda(s)\vec t(s) \iff$$

$$\iff -\tau(s)\vec n(s) \mp \lambda(s)\vec t(s) = 0 \Rightarrow \tau(s)=0,\ \forall s \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Η C είναι επίπεδη

Το επίπεδο της καμπύλης είναι το εφαπτόμενο της επιφάνειας S

Άσκηση 4

Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$X:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ τ/ω $X(u,v) = (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)$

1) Είναι κανονική;
2) Είναι ευθειογενής;
3) Είναι αναπτυκτή;
4) Ποια επιφάνεια είναι;

ΛΥΣΗ

1) $x_u = (-\sin u - v\cos u,\ \cos u - v\sin u,\ 0)$

$x_v = (-\sin u,\ \cos u,\ 1)$

$$x_u \times x_v = (\cos u - v\sin u,\ \sin u + v\cos u,\ \cancel{-\sin u\cos u} - v\cos^2 u \cancel{+\sin u\cos u} - v\sin^2 u)$$

$$= (\cos u - v\sin u,\ \sin u + v\cos u,\ -v)$$

$\| x_u \times x_v \| = 1 + 2v^2 > 0 \Rightarrow$ κανονική

2) $x(u,v) = (\cos u, \sin u, 0) + (-v\sin u,\ v\cos u,\ v) =$

$= (\cos u, \sin u, 0) + v(-\sin u, \cos u, 1) =$

$= c(u) + v\,w(u)$ όπου

$c(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ και $w(u) = (-\sin u, \cos u, 1) \neq 0$

Άρα, x ευθειογενής.

(Αν δεν γίνεται με u, δεν γίνεται με v τότε απαντούμε "δεν μπορούμε να αποφανθούμε")

3) $N(u,v) = \dfrac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+2v^2}}(\cos u - v\sin u,\ \sin u + v\cos u,\ -v)$

Εξαρτάται (με μή τετριμμένο τρόπο από το v)

<u>β' τρόπος</u>: Υπολογίζω την καμπυλότητα Gauss και θα βγει $K<0 \Rightarrow$ μη αναπτυκτή επιφάνεια

4) $\left.\begin{array}{l} x = \cos u - v\sin u \\ y = \sin u + v\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = 1+v^2 = 1+z^2 \Rightarrow x^2+y^2-z^2=1$

μονόχωνο υπερβολοειδές

$z=0$